

ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ :	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π. / Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	26 – 08 – 2025

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Φροντ/ακό σελίδα 96

A2. i) α) Φροντ/ακό σελίδα 30 **β)** Φροντ/ακό σελίδα 36
ii)

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(f(x)) - 1}{f(x)} \right) = 0, \text{ θέτουμε } f(x) = u, \text{ όταν } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{(x - x_0)^{2v}} \right) = +\infty, v \in \mathbb{N}^*.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{g(x)}{f(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \right) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty, \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0.$$

A3. α) Φροντ/ακό σελίδα 47, **β)** Φροντ/ακό σελίδα 60, **γ)** Φροντ/ακό σελίδα 95.

A4. α) Λ, **β)** Σ, **γ)** Λ, **δ)** Λ, **ε)** Σ.

ΘΕΜΑ Β

B1. α) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2$, έχουμε $x_1^3 < x_2^3$ και $x_1 + 2 < x_2 + 2$.

Άρα προσθέτουμε κατά μέλη και παίρνουμε: $x_1^3 + x_1 + 2 < x_2^3 + x_2 + 2$, οπότε:

$f(x_1) < f(x_2)$, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) $f(x^2 + 1) > f(2x)$ και f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και

$$x^2 + 1 > 2x \Leftrightarrow x^2 + 1 - 2x > 0 \text{ ισοδύναμα } (x - 1)^2 > 0 \text{ που ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{1\}.$$

B2. Είναι $f(-1) = 0$ και $\eta\mu^3 x + \eta\mu x + 2 = 0 \Leftrightarrow f(\eta\mu x) = f(-1)$. Επειδή όμως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, θα είναι και 1-1 σε αυτό, οπότε

$$\text{από } f(\eta\mu x) = f(-1), \text{ έχουμε } \eta\mu x = -1, \text{ με } x \in (-\pi, 0), \text{ επομένως } x = -\frac{\pi}{2}.$$

$$\mathbf{B3. i)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x + 2 - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2 + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1) = 1$$

$$\mathbf{ii)} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + x + 2) = 0, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow -1} |f(x)| = 0 \text{ με } |f(x)| > 0 \text{ κοντά στο } -1,$$

οπότε $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{|f(x)|} = +\infty$.

iii) Για το $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\eta\mu(f(x))}{f(x)}$, θέτουμε $f(x) = u$ κοντά στο -1 , με $u_0 = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$, άρα

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\eta\mu(f(x))}{f(x)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1.$$

B4. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2$, έχουμε $x_1 + 1 < x_2 + 1$, οπότε $(f \circ g)(x_1) < (f \circ g)(x_2)$.
Ισοδύναμα έχουμε $f(g(x_1)) < f(g(x_2))$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα,
παίρνουμε $g(x_1) < g(x_2)$, συνεπώς η g είναι γνησίως αύξουσα.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Στην ισότητα $(f \circ g)(x) = e^{3x} + 3e^{2x} + 5e^x + 6 \Leftrightarrow f(g(x)) = e^{3x} + 3e^{2x} + 5e^x + 6$

$$\Leftrightarrow f(e^x + 1) = e^{3x} + 3e^{2x} + 5e^x + 6, \text{ αν θέσουμε } e^x + 1 = \omega, \text{ άρα } e^x = \omega - 1, \text{ με}$$

$$e^x > 0 \Leftrightarrow \omega - 1 > 0 \Leftrightarrow \omega > 1, \text{ τότε θα έχουμε:}$$

$$f(\omega) = (\omega - 1)^3 + 3(\omega - 1)^2 + 5(\omega - 1) + 6$$

$$\Leftrightarrow f(\omega) = \omega^3 - 3\omega^2 + 3\omega - 1 + 3(\omega^2 - 2\omega + 1) + 5\omega - 5 + 6$$

$$\Leftrightarrow f(\omega) = \omega^3 - 3\omega^2 + 3\omega - 1 + 3\omega^2 - 6\omega + 3 + 5\omega - 5 + 6$$

$$\Leftrightarrow f(\omega) = \omega^3 + 2\omega + 3, \omega > 1.$$

Άρα ο τύπος της f είναι $f(x) = x^3 + 2x + 3, x > 1$.

Γ2. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$, οπότε για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1^3 < x_2^3 \quad (1) \text{ και } x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \Rightarrow 2x_1 + 3 < 2x_2 + 3 \quad (2).$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) έχουμε:

$$x_1^3 + 2x_1 + 3 < x_2^3 + 2x_2 + 3 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε και 1-1 στο $\mathbb{R}$.

Ισοδύναμα θα δείξουμε ότι για κάθε $x \neq 0$ ισχύει: $f(|x|) > f(|\eta\mu x|)$.

Πράγματι $f(|x|) > f(|\eta\mu x|) \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} |x| > |\eta\mu x|$, το οποίο αληθεύει για κάθε $x \neq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Γ3. i)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 15}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x + 3 - 15}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x - 12}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 6)}{x - 2} = \\ &= 2^2 + 2 \cdot 2 + 6 = 14. \end{aligned}$$

ii) Είναι $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + 2x + 3) = (-1)^3 + 2(-1) + 3 = -1 - 2 + 3 = 0$.

Άρα για το $\lim_{x \rightarrow -1} \left[f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{f(x)} \right]$, θέτουμε $f(x) = u$, οπότε $u_0 = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$.

Το όριο γίνεται: $\lim_{u \rightarrow 0} \left(u \cdot \eta\mu \frac{1}{u} \right) = 0$.

iii) Για το $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|f(x)+2| - |f(x)-3| + 1}{x+1}$, έχουμε:

- $\lim_{x \rightarrow -1} (f(x)+2) = \lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + 2x + 3 + 2) = (-1)^3 + 2(-1) + 5 = 2 > 0$, άρα
 $f(x)+2 > 0$ κοντά στο -1

- $\lim_{x \rightarrow -1} (f(x)-3) = \lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + 2x + 3 - 3) = (-1)^3 + 2(-1) = -3 < 0$, άρα
 $f(x)-3 < 0$ κοντά στο -1

Το όριο γίνεται:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|f(x)+2| - |f(x)-3| + 1}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)+2 + f(x)-3 + 1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2f(x)}{x+1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x^3 + 2x + 3)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x+1)(x^2 - x + 3)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} 2(x^2 - x + 3) = \\ &= 2[(-1)^2 - (-1) + 3] = 10. \end{aligned}$$

Γ4. Έστω $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \lambda^2 + 5\lambda - 9}{x} = \ell$, όπου $\ell \in \mathbb{R}$.

Θέτουμε $\frac{f(x) - \lambda^2 + 5\lambda - 9}{x} = h(x)$, άρα $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \ell$. Κοντά στο 0 έχουμε:

$\frac{f(x) - \lambda^2 + 5\lambda - 9}{x} = h(x) \Leftrightarrow f(x) - \lambda^2 + 5\lambda - 9 = x \cdot h(x)$. Άρα θα είναι:

$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - \lambda^2 + 5\lambda - 9) = \lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot h(x)) \Leftrightarrow 3 - \lambda^2 + 5\lambda - 9 = 0 \cdot \ell$

$\Leftrightarrow -\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0 \stackrel{\Delta=1}{\Leftrightarrow} \lambda = 2 \text{ ή } \lambda = 3$, Αφού $\lambda > 2$, τότε δεκτή είναι η $\lambda = 3$.

Για $\lambda = 3$ θα είναι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \lambda^2 + 5\lambda - 9}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x + 3 - 3^2 + 5 \cdot 3 - 9}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2 + 2)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 2) = 2. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. α. Θέτουμε $h(x) = x^3 + x$, $x \in \mathbb{R}$.

Η δοθείσα γίνεται: $f^3(x) + f(x) = x - 1 \Leftrightarrow h(f(x)) = x - 1$, $x \in \mathbb{R}$ (1).

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ (2), έχουμε $x_1^3 < x_2^3$ (3).

Με πρόσθεση κατά μέλη των (2) και (3) έχουμε:

$x_1^3 + x_1 < x_2^3 + x_2 \Leftrightarrow h(x_1) < h(x_2)$. Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Όμως για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $x_1 - 1 < x_2 - 1$. Άρα λόγω της (1):

$x_1 - 1 < x_2 - 1 \Rightarrow h(f(x_1)) < h(f(x_2)) \xRightarrow{h \text{ γν. αύξ.}} f(x_1) < f(x_2)$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β. Η ανίσωση για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισοδύναμα γίνεται:

$$f(e^{2x} + e) < f[e^x(e+1)] \xRightarrow{f \text{ γν. αύξ.}} e^{2x} + e < e^x(e+1) \Leftrightarrow e^{2x} - (e+1)e^x + e < 0.$$

Θέτουμε $e^x = y$, άρα η ανίσωση γίνεται: $y^2 - (e+1)y + e < 0$.

Με διακρίνουσα $\Delta = (e+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot e = e^2 + 2e + 1 - 4e = e^2 - 2e + 1 = (e-1)^2$ και

$$\text{ρίζες } y_{1,2} = \frac{e+1 \pm \sqrt{(e-1)^2}}{2} = \frac{e+1 \pm (e-1)}{2} = \begin{cases} \frac{e+1+e-1}{2} = e \\ \frac{e+1-e+1}{2} = 1 \end{cases}, \text{ προκύπτει ο}$$

ακόλουθος πίνακας προσήμου για το τριώνυμο $y^2 - (e+1)y + e$.

x	$-\infty$	1	e	$+\infty$
$y^2 - (e+1)y + e$		 ○ 	 ○ 	
	+		-	+

Άρα $y^2 - (e+1)y + e < 0 \Leftrightarrow 1 < y < e$.

Τελικά θα είναι $1 < y < e \Leftrightarrow 1 < e^x < e \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

Δ2. i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f^3(x) + f(x) = x - 1$, άρα:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f^3(x) + f(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) \Leftrightarrow \ell^3 + \ell = 1 - 1 \Leftrightarrow \ell(\ell^2 + 1) = 0 \xRightarrow{\ell^2 + 1 > 0} \Leftrightarrow \ell = 0.$$

ii) Για x κοντά στο 1 είναι:

$$f^3(x) + f(x) = x - 1 \Leftrightarrow f(x) \cdot (f^2(x) + 1) = x - 1 \xRightarrow{f^2(x) + 1 > 0} \frac{f(x)}{x - 1} = \frac{1}{f^2(x) + 1}, \text{ άρα:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{f(x)}{x - 1} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f^2(x) + 1} = \frac{1}{0^2 + 1} = 1.$$

Δ3. α. Είναι $\lim_{x \rightarrow 1} |f(x)| = 0$, (αφού $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$), με $|f(x)| > 0$ κοντά στο 1.

Άρα $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{|f(x)|} = +\infty$. Επομένως:

- Αν $\kappa < 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\kappa}{|f(x)|} = \lim_{x \rightarrow 1} \kappa \cdot \frac{1}{|f(x)|} = -\infty$
- Αν $\kappa > 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\kappa}{|f(x)|} = \lim_{x \rightarrow 1} \kappa \cdot \frac{1}{|f(x)|} = +\infty$

β. Έστω $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\eta\mu(\sqrt{x+3}-2)}{x-1} + \frac{1}{g^{2025}(x)} + |g(x)| \right] = A$. Έχουμε:

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(\sqrt{x+3}-2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\eta\mu(\sqrt{x+3}-2)}{\sqrt{x+3}-2} \cdot \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} \right] = 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, διότι:

➤ Για το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(\sqrt{x+3}-2)}{\sqrt{x+3}-2}$, θέτουμε $u = \sqrt{x+3}-2$, άρα εφόσον

$$u_0 = \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x+3}-2) = \sqrt{1+3}-2 = 0, \text{ το όριο γίνεται } \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{➤ } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3})^2 - 2^2}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

- $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{g^{2025}(x)} \right] = 0$, αφού για $\kappa < 0$ όπως δείξαμε $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -\infty$

- $\lim_{x \rightarrow 1} |g(x)| = +\infty$, αφού για $\kappa < 0$ όπως δείξαμε $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -\infty$

Τελικά το ζητούμενο όριο μας δίνει: $A = \frac{1}{4} + 0 + \infty = +\infty$

Δ4. ι) Για κάθε x κοντά στο 1, είναι $x > 2 - \frac{1}{x}$, αφού:

$$x > 2 - \frac{1}{x} \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x^2 > 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 > 0 \text{ το οποίο προφανώς}$$

$$\text{ισχύει. Άρα } x > 2 - \frac{1}{x} \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) > f\left(2 - \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow f(x) - f\left(2 - \frac{1}{x}\right) > 0.$$

Επίσης είναι $\lim_{x \rightarrow 1} \left[f(x) - f\left(2 - \frac{1}{x}\right) \right] = 0 - 0 = 0$, αφού:

- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ από το Δ2 (i) και
- για το $\lim_{x \rightarrow 1} f\left(2 - \frac{1}{x}\right)$ αν θέσουμε $2 - \frac{1}{x} = u$, θα είναι $u_0 = \lim_{x \rightarrow 1} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = 1$, άρα το όριο θα γίνει $\lim_{u \rightarrow 1} f(u) = 0$

Από τα παραπάνω προκύπτει $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{f(x) - f\left(2 - \frac{1}{x}\right)} \right] = +\infty$.

ii) Για το $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2g^2(x) + 1}{g^2(x) + 2} \cdot \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \sin \theta}{\theta^2} \right]$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \sin \theta}{\theta^2} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \sin \theta}{\theta^2} \cdot \frac{1 + \sin \theta}{1 + \sin \theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \sin^2 \theta}{\theta^2 (1 + \sin \theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\eta \mu^2 \theta}{\theta^2 (1 + \sin \theta)} = \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\eta \mu \theta}{\theta} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \sin \theta} \right] = 1^2 \cdot \frac{1}{1 + \sin 0} = \frac{1}{2} \quad \text{και} \end{aligned}$$

άρα τελικά το ζητούμενο όριο γίνεται:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2g^2(x) + 1}{g^2(x) + 2} \cdot \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \sin \theta}{\theta^2} \right] &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2g^2(x) + 1}{g^2(x) + 2} \cdot \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2g^2(x) + 1}{g^2(x) + 2} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g^2(x) \left(2 + \frac{1}{g^2(x)} \right)}{g^2(x) \left(1 + \frac{2}{g^2(x)} \right)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 + \frac{1}{g^2(x)}}{1 + \frac{2}{g^2(x)}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 + 0}{1 + 0} = 1 \end{aligned}$$

(αφού $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -\infty$ για $\kappa < 0$, άρα $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{g^2(x)} = 0$).